Séries De Fourier

Définition et coefficients de Fourier

Une série de Fourier (réelle) est une somme infinie en sinus et cosinus de la forme:

$$\sum_{n\geq 0}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

En tout point x où cette série converge, on note $f(x)$ la valeur de cette somme.

La série sera dite série de Fourier de f

On va d'abord, déterminer quelles sont les fonctions qui peuvent être représentées par des séries de Fourier

et ensuite trouver le lien entre cette fonction et les coèfficients de Fourier.

Théorème

Soit f une fonction 2π-périodique.

Si f est représentée par une série de Fourier alors

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{cases}$$

Preuve

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Pour calculer a_0, on va d'abord calculer $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n\geq 1} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{n\geq 1} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx$$

mais $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = a_0 \left[x\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi a_0.$

et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left[\tfrac{1}{n} \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \tfrac{1}{n} \sin n\pi - \tfrac{1}{n} \sin(-n\pi) = \tfrac{2}{n} \sin n\pi = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx$$

et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0$ car $\sin(nx)$ est impaire

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx$$ si g est paire

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0 \text{ if } g$$ si g est impaire

ainsi $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0$$

parsuite $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Maintenant, pour calculer a_n, on calcule $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \cos kx dx$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n\geq 1} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + \sum_{n\geq 1} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx$$

mais $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k}\sin k\pi - \frac{1}{k}\sin(-k\pi) = \frac{2}{k}\sin k\pi = 0$

Comme $\sin nx \cos kx$ est impaire, alors $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = 0$

Et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x)\, dx$

Si $n \neq k$:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+k}\sin(n+k)x + \frac{1}{n-k}\sin(n-k)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Si $n = k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2nx + 1)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}\sin 2nx + x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Ainsi $\sum_{n\geq 1} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = a_n\pi$

Et on obtient: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n\pi$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx}$$

De la même façon on calcule b_n

Remarque

Si f est paire alors:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \quad \text{for all } n \geq 1$$

On a besoin de calculer uniquement a_n

Si f est impaire alors:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \quad \text{for all } n \geq 1$$

On a besoin de calculer uniquement b_n

Théorème de Convergence

Soit f une fonction 2π-périodique. On suppose que:

f est continue presque partout sur $[-\pi, \pi]$

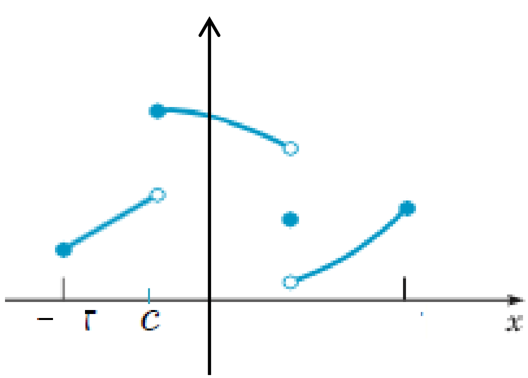
f est monotone par morceaux sur $[-\pi, \pi]$

f est bornée

alors

La série de Fourier de f converge vers f en tout point où f est continuite.

Elle converge vers $\dfrac{f(c^{+}) + f(c^{-})}{2}$ en tout point de dscontinuté c de f

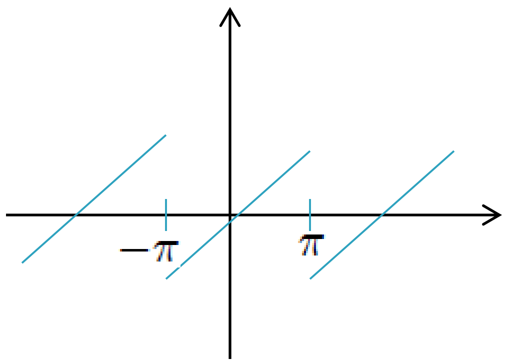


Exemple:

Soit $f(x) = x,\ x \in [-\pi, \pi[$ une fonction 2π-périodique.

Montrer que f admet une représentation en série de Fourier

Trouver les coèffcients de Fourier qui lui sont associés.



En effet, comme f est impaire alors $a_n = 0,\ \forall n \geq 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin n\pi - \frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\sin n\pi\right)$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

f est 2π-périodique

f est continue sur $[-\pi, \pi[$

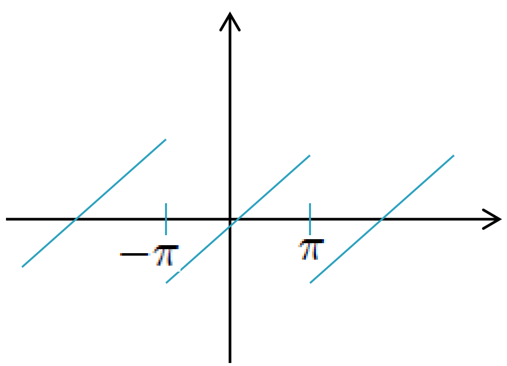
f est croissante sur $[-\pi, \pi[$

f est bornée

donc la série de Fourier de f converge vers $f(x) = x$, $\forall x \neq (2k+1)\pi$

et converge vers $\dfrac{f(c^+) + f(c^-)}{2} = 0$ si $c = (2k+1)\pi$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.\sin nx = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \neq (2k+1)\pi \\ 0 & \text{si} \quad x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$



Remarque

Si f est $2T$-pérodique ($T \neq \pi$) alors la série de Fourier de f est donnée par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{n\pi}{T} x \right)$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = & \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)dx \\ a_n = & \frac{1}{T} \displaystyle\int_{-T}^{T} f(x) \cos \tfrac{n\pi}{T} x dx \\ b_n = & \frac{1}{T} \displaystyle\int_{-T}^{T} f(x) \sin \tfrac{n\pi}{T} x dx \end{cases}$$

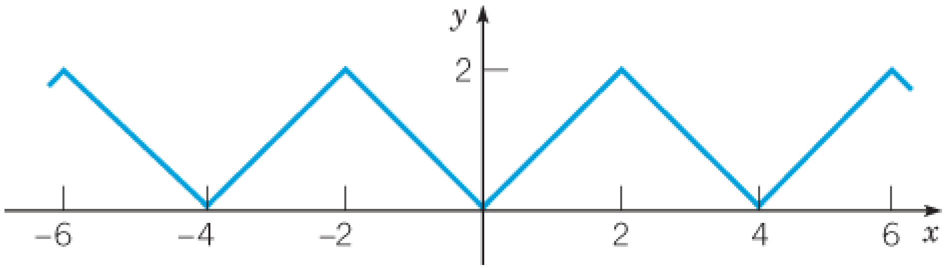
Exemple

Donner la série de Fourier associée à la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 2; \end{cases}$$

$$f(x+4) = f(x).$$

f est de période $2T = 4$



C_f est symétrique par rapport à $y'y$ donc f est paire et $b_n = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < 2; \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x dx = 1 + 1 = 2.$$

$$a_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx.$$

$$\begin{aligned} a_m &= \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{m\pi}x\sin\left(\tfrac{m\pi x}{2}\right) - \left(\tfrac{2}{m\pi}\right)^2\cos\left(\tfrac{m\pi x}{2}\right)\right)\Big|_{-2}^{0} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{m\pi}x\sin\left(\tfrac{m\pi x}{2}\right) + \left(\tfrac{2}{m\pi}\right)^2\cos\left(\tfrac{m\pi x}{2}\right)\right)\Big|_{0}^{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(-\left(\tfrac{2}{m\pi}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{m\pi}\right)^2\cos(m\pi) + \left(\tfrac{2}{m\pi}\right)^2\cos(m\pi) - \left(\tfrac{2}{m\pi}\right)^2\right) \\ &= \tfrac{4}{(m\pi)^2}(\cos m\pi - 1), \quad m = 1, 2, \ldots \\ &= \begin{cases} -\frac{8}{(m\pi)^2}, & m \text{ impair} \\ 0, & m \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \tfrac{8}{\pi^2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi x}{2}\right) + \tfrac{1}{3^2}\cos\left(\tfrac{3\pi x}{2}\right) + \tfrac{1}{5^2}\cos\left(\tfrac{5\pi x}{2}\right) + \cdots\right) \\ &= 1 - \tfrac{8}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\tfrac{1}{m^2}\cos\left(\tfrac{m\pi x}{2}\right) \\ &= 1 - \tfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\tfrac{(2n-1)\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Représentation complexe des séries de Fourier

- Cas où f est 2π-périodique:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n . e^{inx}}$$

avec $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \ \ k \in \mathbb{Z}$

- Cas où f est $2T$-périodique:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n . e^{in\frac{\pi}{T}x}}$$

avec $c_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x) e^{-ik\frac{\pi}{T}x} dx, \ \ k \in \mathbb{Z}$

Relation entre les représentations réelle et complexe en série de Fourier:

Déduction de la représentation complexe à partir de la représentation réelle:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad n > 0 \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

Déduction de la représentation réelle à partir de la représentation complexe:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \qquad n > 0 \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

Série de Fourier de la fonction dérivée:

$$\begin{cases} a_0(f') = 0 & \\ a_n(f') = nb_n(f) & n > 0 \\ b_n(f') = -na_n(f) & \end{cases}$$

$$c_n(f') = inc_n(f)\ ;\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Théorème de Parseval

Théorème : Soit f une fonction continue par morceaux, 2pi-périodique. Alors on a les égalités suivantes :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right).$$

Les $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$ désignent les coefficients de Fourier de f.